

基于图拉普拉斯正则化的PET图像核重建方法

盛玉霞¹, 孙 坤¹, 柴 利^{2*}

(1. 武汉科技大学信息科学与工程学院, 湖北武汉 430081; 2. 浙江大学控制科学与工程学院, 浙江杭州 310027)

摘 要: 正电子发射断层成像 (Positron Emission Tomography, PET) 在很多疾病的早期诊断中有重要的作用, PET 图像重建的难点之一是如何在保持重建图像中病灶边缘特性的同时具有良好的去噪性能. 针对此问题, 本文提出了一种结合图拉普拉斯正则化和深度图像先验的 PET 图像核重建方法. 设计了改进的 U-net 神经网络, 将 PET 前向投影模型中的核系数表示为神经网络的输出; 通过先验图像构建图拉普拉斯矩阵, 重建问题被建模为基于神经网络的带图拉普拉斯正则化项的最大似然函数优化问题. 利用优化转移方法导出了收敛的迭代重建算法, 每一次迭代包括由核重建方法更新图像和利用神经网络更新核系数两个步骤. 仿真和临床实验结果表明, 本文提出的方法在不同的指标下都有更好的重建效果, 优于已有核重建方法以及最新的基于深度系数先验的重建方法.

关键词: PET; 图像重建; 核方法; 深度图像先验; 图拉普拉斯正则化

基金项目: 国家自然科学基金 (No.62173259); 湖北省自然科学基金 (No.2022CFB110)

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2024)01-0118-11

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20221161

A Kernel Method for PET Image Reconstruction with Graph Laplacian Regularization

SHENG Yu-xia¹, SUN Kun¹, CHAI Li^{2*}

(1. School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430081, China;

2. College of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China)

Abstract: Positron emission tomography (PET) plays an important role in the early diagnosis of many diseases, and one of the difficult problems in PET image reconstruction is how to maintain the edge characteristics of the lesion in the reconstructed image while having good denoising performance. To this problem, a kernel method for PET image reconstruction is proposed, which combines deep image prior and the graph Laplacian regularization. An improved U-net neural network is designed to represent the kernel coefficients in the PET forward model. The graph Laplacian matrix is constructed by the prior information. The reconstruction model is formulated as a maximum likelihood neural network-based constrained optimization problem with graph Laplacian regularization. By applying the optimization transfer algorithm, we derive a convergent iterative algorithm. Each iteration includes a KEM step for updating image and a kernel coefficient update step using neural network. The results from simulations and in-vivo data demonstrate that the proposed method has better reconstruction performance under different criteria, and outperforms the kernelized expectation maximization (KEM) and the state of the art neural KEM methods.

Key words: PET; image reconstruction; kernel method; deep image prior; graph laplacian regularization

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62173259); Natural Science Foundation of Hubei Province (No.2022CFB110)

1 引言

正电子发射断层成像(Positron Emission Tomography, PET)可以反映活体的代谢过程. 高质量的PET图像在肿瘤、心脏病和神经疾病的早期诊断分析中具有重要的临床意义. 在PET扫描过程中,受探测器物理因素的限制和放射性示踪剂注射剂量的约束,PET扫描数据光子计数率低,导致重建图像分辨率低、噪声程度高. 如何由低计数率投影数据重建出高质量的PET图像是一个具有挑战性的问题. 传统的最大似然期望最大化(Maximum Likelihood Expectation Maximization, MLEM)方法是很多PET图像重建方法的基础^[1]. 但MLEM重建图像噪声大、分辨率低,并且MLEM随着迭代次数增加图像质量退化. 为了提升重建图像质量,学者们在MLEM的基础上进行了改进,包括使用正则化项约束待重建图像^[2]、引入非局部均值(NonLocal Means, NLM)先验^[3]、基于全变差方法^[4]、利用稀疏字典^[5]或者核模型表示待重建图像^[6]. 文献[3]提出了一种基于NLM滤波先验的PET图像贝叶斯重建方法,其将NLM滤波图像减去未滤波图像的差值图像作为先验,优于基于局部邻域先验的重建方法.

核重建方法利用先验数据构建核矩阵,在似然函数框架下由期望最大化算法来简单实现,有较好的重建效果. Wang等人^[6]将动态PET扫描数据的合成帧作为先验信息引入PET前向投影模型中,在此基础上提出了核重建(Kernelized Expectation Maximization, KEM)方法. 文献[7]研究了利用磁共振(Magnetic Resonance, MR)图像作为先验信息的KEM方法. 文献[8]利用动态PET数据中的时间和空间信息构建时空域核矩阵,提出了基于时空核的PET图像重建算法. 文献[9]通过在核重建迭代过程中引入NLM滤波来提高重建图像质量. 文献[10]在NLM核基础上,从中值滤波的合成图像中提取先验信息来构建核矩阵,将其用于KEM框架中来更好地抑制噪声. KEM方法和MLEM方法一样,随着迭代次数增加也会出现图像质量退化,需要提前终止迭代或引入正则化项来进一步提高重建性能. 文献[11]在核重建框架中加入正则化项约束,提出基于核空间复合正则化项的PET图像核重建算法. 基于正则化的方法通常包含多个需要调节的超参数,优化算法较复杂.

一些深度学习方法也被应用于医学影像^[12-14]和PET图像重建^[15]. 文献[16]对KEM方法进行扩展,提出了基于卷积神经网络的PET图像重建框架. 生成对抗网络^[17,18]、深度卷积编码解码器网络^[19]、基于模型的深度学习^[20]也被用于PET图像重建. 以上深度学习方法需要大量数据集来预训练网络,而在实际临床中,很难获得大量的高质量PET图像训练数据集.

使用深度图像先验(Deep Image Prior, DIP)来重建图像,不需要数据集来预训练神经网络^[21,22]. Gong等人^[23]将深度图像先验应用于PET图像重建,在迭代过程中更新网络参数,但其利用ADMM算法求解优化问题时存在多个超参数难调节的问题,不能保证重建图像效果. 文献[24]结合核方法和深度图像先验,提出了一种改进的深度系数先验核重建方法(Neural KEM),其使用深度图像先验来表示核系数,直接对单个患者图像进行学习,通过优化转移方法来求解优化问题,不需要调整超参数和预训练网络,相比文献[23]更易实现,并且有更好的重建效果.

图信号处理是近年来兴起的高维非规则化数据分析处理新方法,其借助代数图论和图谱理论来处理高维加权图上的信号^[25,26]. 在图像处理中,可以通过建立图像像素间的图连接关系将图像转化为图信号,图包含的结构信息可以更好地保留图像边缘特性. 图拉普拉斯矩阵的二次型是定义在图上的二次差分项,其反映了图信号的平滑程度,可以用来作为去噪、重建等任务的惩罚项,在自然图像去噪、超分辨率重建以及去模糊中都表现出了很好的效果^[27,28].

如前所述,PET图像空间分辨率低,噪声大. PET图像重建的难点在于如何取得去噪效果和保留病灶边缘特性之间的平衡. 针对此问题,本文提出了一种结合图拉普拉斯正则化和深度图像先验的PET图像重建方法. 该方法将PET核系数表示为未训练U-net网络的输出,利用先验信息构建图拉普拉斯矩阵,通过引入图拉普拉斯正则化项来保留重建图像的边缘结构信息. 虽然已有的核方法(包括神经网络加持的核方法)也具有保留某种结构信息的作用,但是本文提出的图结构可以更好地表征图像边缘特性,将图拉普拉斯正则化项引入到PET图像核重建框架中,能在保持病灶边缘特性和滤除噪声之间达到更好的折中. 在重建图像性能指标上,本文方法有最小的MSE值和更高的SNR值,在方差-偏差曲线和CRC-SD曲线上也表现出更好的性能.

本文的主要贡献如下:(1)提出了新的结合图拉普拉斯正则化和深度图像先验的PET图像核重建方法;(2)通过优化转移方法给出了收敛的重建迭代算法;(3)直接通过输入单个患者图像来学习神经网络参数,不需要数据集来预训练网络;(4)所提方法能取得更好的保持病灶边缘和去噪折中效果,优于最新的Neural KEM方法.

本文结构为:第2节介绍背景知识,包括PET图像重建模型、深度图像先验、PET图像核重建方法及图拉普拉斯矩阵二次型;第3节阐述了本文提出的重建框架和优化方法;第4节和第5节分别给出了仿真实验和临床实验结果;第6节对全文进行了总结.

2 相关工作

2.1 PET 图像重建模型

在 PET 成像中, PET 投影数据 $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^N$ 可以建模为独立的泊松随机变量, 其对数似然函数^[6]为

$$L(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N y_i \log \bar{y}_i - \bar{y}_i - \log y_i! \quad (1)$$

投影数据 \mathbf{y} 的期望 $\bar{\mathbf{y}} = \{\bar{y}_i\}_{i=1}^N$ 与待重建 PET 图像 $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j=1}^M$ 之间满足前向投影模型:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{r} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 为系统检测概率矩阵, \mathbf{r} 表示随机事件和散射事件的期望, M 表示待重建 PET 图像的像素个数, N 表示探测对的总个数.

根据最大化对数似然函数, 可得未知图像 \mathbf{x} 的最大似然估计为

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} > 0} L(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (3)$$

对于优化问题(3), 一般采用 MLEM 方法来迭代求解:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \frac{\mathbf{x}^k}{\mathbf{P}^T \mathbf{1}_N} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}^T \mathbf{y}}{\mathbf{P}\mathbf{x}^k + \mathbf{r}} \right) \quad (4)$$

其中, k 表示迭代次数, $\mathbf{1}_N$ 表示元素全为 1 的向量, 上角标 T 表示矩阵的转置. 本文公式中矢量的乘法和除法是逐点的乘法和除法运算.

2.2 深度图像先验

文献[22]提出深度图像先验, 其将图像表示为神经网络的函数 $\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z})$, 其中 f 表示神经网络模型, \mathbf{z} 是网络输入, $\boldsymbol{\theta}$ 是网络参数. 图像重建问题被建模为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{x}_0 - f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z})\| \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = f(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{z}) \quad (6)$$

其中, \mathbf{x}_0 为失真图像. 只需要在网络的输入端输入随机噪声, 使用随机梯度下降算法求解最优网络参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 就可以得到重建图像 $f(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{z})$.

2.3 PET 图像核重建方法

在 PET 图像核重建方法中^[6], 将图像表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 表示核矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 表示相应的核系数. 核矩阵由先验图像通过核函数计算得到.

将式(7)代入到前向投影模型即式(2)中, 有

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r} \quad (8)$$

由期望最大化 (Expectation Maximization, EM) 算法可得到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最大似然估计.

文献[24]提出了基于深度图像先验的 PET 图像核重建方法. 将核系数用神经网络描述 $\boldsymbol{\alpha} = f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z})$, PET 图

像前向投影模型相应表示为

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{K}f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z}) + \mathbf{r} \quad (9)$$

通过最大化对数似然函数, 可由投影数据估计出神经网络参数 $\boldsymbol{\theta}$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L(\mathbf{y}|\mathbf{K}f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z})) \quad (10)$$

通过优化转移方法求解 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 然后由 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}f(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{z})$ 得到重建图像.

2.4 图拉普拉斯矩阵二次型

一个无向加权图 $\mathbf{G} = (V, E, \mathbf{W})$ 由节点集合 $V = \{v_i\}_{i=1}^M$ 、边集合 E 以及加权邻接矩阵 $\mathbf{W} = (w_{ij})$ 组成. 邻接矩阵 \mathbf{W} 为非负对称矩阵, w_{ij} 表示节点 v_i 和节点 v_j 之间的连接权重^[25]. 图 \mathbf{G} 的拉普拉斯矩阵定义如下:

$$\mathcal{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W} \quad (11)$$

其中 \mathbf{D} 是对角矩阵, 其对角元素定义为 $d_{ii} = \sum_{j=1}^M w_{ij}$.

对于一个具有 M 个节点的图信号 \mathbf{x} , 其在图 \mathbf{G} 上的平滑度可以用图拉普拉斯矩阵的二次型 $\mathbf{x}^T \mathcal{L} \mathbf{x}$ 来度量^[28]:

$$\mathbf{x}^T \mathcal{L} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} (x_i - x_j)^2 \quad (12)$$

式(12)可以作为去噪、重建等任务的惩罚项. 当信号在相邻节点的值相似时, 这个值较小, 表示信号 \mathbf{x} 在图 \mathbf{G} 上较为平滑.

3 本文方法

3.1 本文提出的 PET 图像重建框架

在 PET 图像核重建方法的基础上, 我们提出结合图拉普拉斯正则化项和深度图像先验的重建方法, 将 PET 图像重建问题描述为以下带约束优化问题:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & L(\mathbf{y}|\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x}^T \mathcal{L} \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} = \mathbf{K}f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, \mathbf{y} 为投影数据, \mathbf{x} 为待重建的 PET 图像, \mathbf{K} 为核矩阵, \mathcal{L} 表示图拉普拉斯矩阵, $\lambda > 0$ 表示惩罚参数, f 表示神经网络, \mathbf{z} 表示神经网络的输入, $\boldsymbol{\theta}$ 表示神经网络的未知参数. 目标函数的第一项为对数似然函数, 第二项为图拉普拉斯正则化项, 其表征图像在图上的平滑性, 约束条件表示待重建图像由核矩阵来表示, 核系数为神经网络 f 的输出.

将约束项 $\mathbf{x} = \mathbf{K}f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z})$ 代入到目标函数中, 式(13)的优化问题转化为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L(\mathbf{y}|\mathbf{K}f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z})) - \lambda (\mathbf{K}f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z}))^T \mathcal{L} (\mathbf{K}f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z})) \quad (14)$$

求解出最优网络参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 后, 由 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}f(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{z})$ 得到重建图像.

式(14)为带正则化项的KEM重建模型. 在KEM方法中,NLM先验也被用来构造核矩阵^[10]或者在迭代重建过程中引入NLM滤波^[9]. 本文将图拉普拉斯矩阵二次型作为目标函数的正则化项,是显式的带正则化项的KEM方法,能避免KEM随着迭代次数增加出现图像质量退化. 当 $\lambda=0$ 时,本文方法等同于Neural KEM方法^[24];当 $\lambda=0$ 且 f 是恒等映射时,本文方法等同于KEM方法^[6].

3.2 优化问题的求解

式(14)通常采用ADMM算法求解,但其调节超参数的过程较为复杂,我们采用优化转移方法^[29,30]来求解. 根据优化转移方法,首先需要构造一个代理函数 $Q(\theta|\theta^k)$,构造的代理函数需要同时满足以下两个约束条件:

$$Q(\theta|\theta^k) - Q(\theta^k|\theta^k) \leq S(\mathbf{y}|\mathbf{x}) - S(\mathbf{y}|\mathbf{x}^k) \quad (15)$$

$$\nabla Q(\theta^k|\theta^k) = \nabla S(\mathbf{y}|\mathbf{x}^k) \quad (16)$$

其中, ∇ 表示梯度算子, $S(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 为待优化问题的原始目标函数, θ^k 表示第 k 次迭代的网络参数. 优化转移方法在每一步迭代都用代理函数来代替原来的目标函数,这样可以减少求解优化问题的计算时间并加快收敛速度.

式(14)的目标函数包括核空间的对数似然函数和图拉普拉斯正则化项两部分. 我们定义式(14)中目标函数的代理函数为

$$Q(\theta|\theta^k) = Q_1(\theta|\theta^k) - \lambda Q_2(\theta|\theta^k) \quad (17)$$

其中, $Q_1(\theta|\theta^k)$ 和 $Q_2(\theta|\theta^k)$ 分别表示核空间的对数似然函数和图拉普拉斯正则化的代理函数. 对于核空间对数似然函数,使用文献[24]中构造的代理函数 $Q_1(\theta|\theta^k)$,即

$$Q_1(\theta|\theta^k) = \sum_{j=1}^M v_j (\alpha_j^{k+1} \cdot \log f_j(\theta|\mathbf{z}) - f_j(\theta|\mathbf{z})) \quad (18)$$

其中, v_j 为 $\mathbf{v} = \mathbf{K}^T \mathbf{P}^T \mathbf{1}_N$ 的第 j 个元素, α^{k+1} 是更新迭代过程中的核系数图像,即

$$\alpha^{k+1} = \frac{\alpha^k}{\mathbf{v}} \cdot \left(\mathbf{K}^T \mathbf{P}^T \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{PK}\alpha^k + \mathbf{r}} \right) \quad (19)$$

式(19)表示KEM方法的一次迭代重建过程,其中 $\alpha^k = f(\theta^k|\mathbf{z})$.

容易证明 $Q_1(\theta|\theta^k)$ 满足代理函数的约束条件 $Q_1(\theta|\theta^k) - Q_1(\theta^k|\theta^k) \leq L(\mathbf{y}|\mathbf{Kf}(\theta|\mathbf{z})) - L(\mathbf{y}|\mathbf{Kf}(\theta^k|\mathbf{z}))$ 和 $\nabla Q_1(\theta^k|\theta^k) = \nabla L(\mathbf{y}|\mathbf{Kf}(\theta^k|\mathbf{z}))$.

对于式(14)中的图拉普拉斯正则化项,构造代理函数 $Q_2(\theta|\theta^k)$,即

$$Q_2(\theta|\theta^k) = \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} w_{ij} (2x_i - x_i^k - x_j^k)^2 \quad (20)$$

其中, x_i 为 $\mathbf{x} = \mathbf{Kf}(\theta|\mathbf{z})$ 的第 i 个元素, \mathcal{N}_i 表示图像中像素 i 的邻居集合. 可以证明 $Q_2(\theta|\theta^k)$ 满足约束条件:

$$Q_2(\theta|\theta^k) - Q_2(\theta^k|\theta^k) \geq (\mathbf{Kf}(\theta|\mathbf{z}))^T \mathcal{L}(\mathbf{Kf}(\theta|\mathbf{z})) - (\mathbf{Kf}(\theta^k|\mathbf{z}))^T \mathcal{L}(\mathbf{Kf}(\theta^k|\mathbf{z})),$$

$$\nabla Q_2(\theta^k|\theta^k) = \nabla (\mathbf{Kf}(\theta^k|\mathbf{z}))^T \mathcal{L}(\mathbf{Kf}(\theta^k|\mathbf{z}))$$

由式(18)~(20)得到的 $Q_1(\theta|\theta^k)$ 和 $Q_2(\theta|\theta^k)$ 可以看出,构造的代理函数 $Q(\theta|\theta^k)$ 满足两个约束条件式(15)和式(16). 因此式(14)的求解转化为在每一次迭代时求解式(17)的最大值,即

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} Q(\theta|\theta^k) \quad (21)$$

利用深度学习软件库Pytorch中的Adam算法^[31]求解式(21)的目标函数,完成网络学习过程. 在迭代过程中交替更新核系数图像 α 和网络参数 θ ,最后由 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Kf}(\hat{\theta}|\mathbf{z})$ 计算得到重建的PET图像. 与文献[24]中的优化转移方法类似,本文提出的迭代优化算法可以收敛到局部最优解.

3.3 图拉普拉斯矩阵的构造

邻接矩阵由下式定义:

$$w_{ij} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_j\|_2^2}{2\sigma^2}\right), & \tilde{\mathbf{x}}_j \in \text{kNN}(\tilde{\mathbf{x}}_i) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (22)$$

其中, σ 是高斯加权核函数的参数; $\tilde{\mathbf{x}}_i$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_j$ 分别表示先验图像中以像素 i 和像素 j 为中心的图像块,其大小为 $h \times h$;kNN($\tilde{\mathbf{x}}_i$)表示 $\tilde{\mathbf{x}}_i$ 的 K 最近邻邻居(K-Nearest Neighbors, KNN). 使用式(23)将邻接矩阵对称化:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{W} + \mathbf{W}^T) \quad (23)$$

得到邻接矩阵 \mathbf{W} 后,由式(11)计算得到图拉普拉斯矩阵.

3.4 算法与实现

本文方法的具体实现步骤见算法1. 每一次迭代包括两个步骤:(1)图像重建,即通过式(19),使用KEM方法由投影数据计算得到核系数;(2)网络学习,即利用Adam算法求解式(21),得到网络参数.

本文采用改进的U-net神经网络,其整体结构如图1所示. 它由以下几部分组成:(1)3×3的卷积(Convolutional, Conv)层;(2)批归一化(Batch Normalization, BN)层;(3)整流线性单元(Rectified Linear Unit, ReLU)层;(4)步长为2的最大池化层作为下采样模块;(5)双线性插值层作为上采样模块. 与原始U-net网络相比,

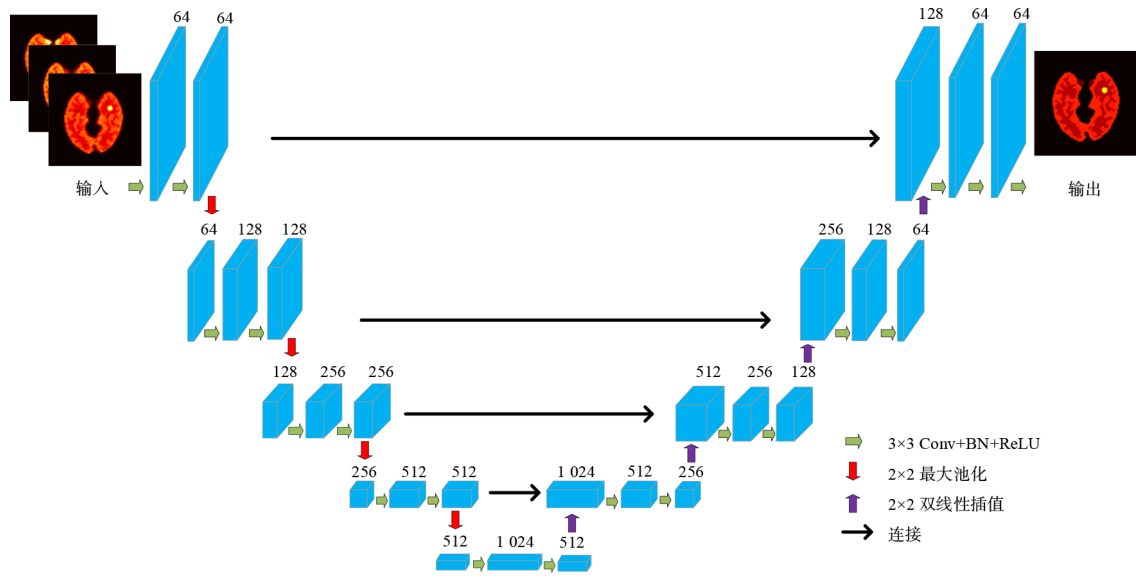


图1 本文使用的网络结构图

我们在卷积层和 ReLU 层增加一个 BN 层,可以加速收敛,并使用先验图像作为网络输入.

算法 1 基于图拉普拉斯正则化的 PET 图像核重建方法

输入: PET 扫描数据 y , 系统矩阵 P , 核矩阵 K , 随机散射事件期望 r , 先验图像 z , 网络初始化参数 θ^0 , 总迭代次数 J , Adam 优化参数 ϵ
输出: 重建图像 \hat{x}

1. 利用先验图像构造图拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} . 首先根据式(22)计算邻接矩阵 \mathbf{W} , 然后根据式(23)对称化 \mathbf{W} , 最后由式(11)计算得到 \mathcal{L}
2. FOR $k = 0$ to $J-1$, do
3. 利用核重建算法更新核系数, 即

$$\alpha^{k+1} = \frac{\alpha^k}{v} \cdot \left(\mathbf{K}^T \mathbf{P}^T \frac{y}{\mathbf{P} \mathbf{K} \alpha^k + r} \right)$$

其中, $\alpha^k = f(\theta^k | z)$

4. 通过最大化式(17)来进行网络学习, 得到更新的网络参数. 利用 Adam 算法求解式(21), 得到 θ^{k+1} , 使用 Adam 算法时, 设定停止迭代准则为: 如果连续 10 次迭代的损失函数值之差都小于 ϵ , 便停止迭代
5. END FOR
6. 得到重建图像 $\hat{x} = \mathbf{K}f(\theta^k | z)$

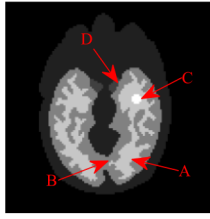
4 仿真数据实验

4.1 实验设置

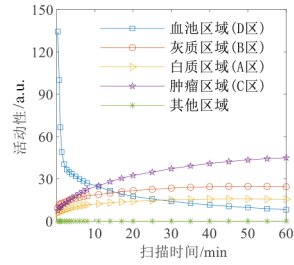
为了验证所提方法的有效性, 我们使用二维 Zubal 头部体模进行仿真数据研究. 动态 PET 扫描模拟 GE DST whole-body PET 扫描仪的结构^[6]. Zubal 头部体模如图 2(a) 所示, 由白质、灰质、直径为 15 mm 的肿瘤和血池组成, 分别标记为 A、B、C 和 D. 进行 60 min 的动态 PET 扫描, 得到 24 帧动态采集的 PET 数据: 4×20 s, 4×40 s, 4×60 s, 4×180 s 和 8×300 s. 模拟的示踪剂是 ^{18}F -

FDG. Zubal 头部体模不同区域的时间活动性曲线 (Time-Activity Curve, TAC) 如图 2(b) 所示. 通过对体模不同区域分配活性变化来模拟代谢情况, 获取真实图像. 图像大小为 111×111 , 体素大小为 $3 \times 3 \text{ mm}^2$. 为避免 U-net 网络上下采样后产生维度不匹配的情况, 需要将网络输入图像大小设置为偶数, 因此我们对图像边界进行了零填充, 将所有图像大小统一调整为 112×112 . 首先使用 Fessler 图像重建工具箱 (<http://web.eecs.umich.edu/~fessler/code>) 产生 PET 系统矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{52290 \times 12544}$; 再对动态活性图像进行前向投影生成无噪正弦图 (包括 210 个探测器对与 249 个投影角度); 然后利用衰减系数图模拟衰减效应, 采用 20% 的均匀背景仿真随机和散射事件; 最后加入泊松噪声, 得到待重建的正弦图数据. 所有重建方法都包括衰减、随机和散射校正, 以获得定量图像. 设置在 60 min PET 扫描时间内光子总数为 8×10^6 . 仿真了 10 次泊松噪声实现, 进行了 10 次独立 PET 重建, 然后取 10 次实验结果的均值进行对比分析. 我们将 60 min 扫描数据均分成 3 个 20 min 数据后相加, 然后进行 100 次 MLEM 迭代, 并使用 3×3 高斯滤波器进行平滑处理, 再进行归一化后得到 3 个 PET 合成帧图像 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{12544 \times 3}$. 仿真实验使用 PET 合成帧作为先验图像.

为说明所提方法的有效性, 将本文方法与其他 5 种方法进行比较, 包括带高斯滤波的 MLEM 重建方法 (后文仍简称为 MLEM)、图拉普拉斯正则化的 MLEM (MLEM-L)、核重建方法^[6] (KEM)、图拉普拉斯正则化的 KEM (KEM-L) 和深度图像先验核重建方法^[24] (Neural KEM). 在对比实验中, 选取图像的第 2, 12, 24 帧进行重建, 迭代次数设置为 60 次.



(a) Zubal头部体模



(b) 各区域时间活动性曲线

图2 Zubal头部体模和时间活动性曲线

4.2 评价指标

为了定量比较不同方法的重建性能,我们使用图像的偏差(Bias)、方差(Variance, Var)、均方误差(Mean Square Error, MSE)以及信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)作为评价指标^[6],其定义分别为

$$\text{Bias}^2 = \frac{\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{\text{tr}}\|_2^2}{\|\mathbf{x}^{\text{tr}}\|_2^2} \quad (24)$$

$$\text{Var} = \frac{1}{N_c} \frac{\sum_{c=1}^{N_c} \|\hat{\mathbf{x}}_c - \bar{\mathbf{x}}\|_2^2}{\|\mathbf{x}^{\text{tr}}\|_2^2} \quad (25)$$

$$\text{MSE} = \text{Bias}^2 + \text{Var} \quad (26)$$

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\|\mathbf{x}^{\text{tr}}\|_2^2}{\|\hat{\mathbf{x}}_c - \mathbf{x}^{\text{tr}}\|_2^2} \right) \quad (27)$$

其中, N_c 表示总的实现次数,在实验中 $N_c = 10$; $\hat{\mathbf{x}}_c$ 表示第 c 次实现的重建图像, $\bar{\mathbf{x}}$ 表示所有重建图像的平均值, \mathbf{x}^{tr} 表示图像的真实值。

我们选取血池和肿瘤作为感兴趣区域(Regions Of Interest, ROI),选取白质区域为背景区域,计算ROI的对比度恢复系数(Contrast Recovery Coefficient, CRC)和背景区域噪声标准差(Standard Deviation, SD),其定义为^[6]

$$\text{CRC} = \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} \left| \frac{\bar{\mathbf{a}}_c}{\bar{\mathbf{b}}_c} - 1 \right| \left| \frac{\bar{\mathbf{a}}^{\text{tr}}}{\bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}}} - 1 \right| \quad (28)$$

$$\text{SD} = \frac{1}{\bar{\mathbf{b}}} \sqrt{\frac{1}{N_c - 1} \sum_{c=1}^{N_c} |\bar{\mathbf{b}}_c - \bar{\mathbf{b}}|^2} \quad (29)$$

其中, N_c 表示总的实现次数, $\bar{\mathbf{a}}_c$ 是第 c 次实现感兴趣区域的均值, $\bar{\mathbf{a}}^{\text{tr}}$ 是感兴趣区域真实值的均值, $\bar{\mathbf{b}}_c$ 是第 c 次实现背景区域的均值, $\bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}}$ 是背景区域真实值的均值, $\bar{\mathbf{b}} = \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} \bar{\mathbf{b}}_c$.

4.3 参数选择

本文方法的参数主要包括构造图拉普拉斯矩阵的参数、惩罚参数和迭代次数。对于图拉普拉斯矩阵的构

造,需要设置最近邻居个数 k 、高斯参数 σ 和图像块大小 $h \times h$ 。具体参数设置见表1。对于惩罚参数 λ 的设置,当 λ 过大时,图像会过于平滑,导致感兴趣区域的CRC降低;当 λ 较小时,虽然可以取得较高的CRC,但MSE值大,图像噪声较多。经过多次实验选择相对较优的参数,第2, 12, 24帧图像分别选择 λ 为 0.03, 0.02 和 0.002。Adam优化参数 ε 设置为 1。核矩阵 \mathbf{K} 的选取同文献[6]。

表1 重建图像参数设置

参数	迭代次数	最近邻居个数	高斯参数	图像块大小
设置	60	48	0.2	3×3

4.4 实验结果与分析

图3显示了第2, 12, 24帧的真实图像,以及不同方法重建的PET图像。由重建图像可以看出,MLEM方法重建的图像有较多噪声,图像模糊且丢失了大量图像结构信息;与MLEM方法相比,KEM和Neural KEM方法都大幅减少了噪声,但在白质和灰质区域内仍存在部分噪声。带图拉普拉斯正则化项约束的MLEM-L和KEM-L方法相比不带正则化项的MLEM和KEM方法,有更小的MSE值,并且更好地保留了肿瘤和结构信息。这说明图拉普拉斯正则化可以进一步提高重建图像质量。本文方法在第2, 12, 24帧,都有最小的MSE值和最好的视觉效果,在白质区域中噪声最少,保留了更多的图像结构信息,更好地保持了边缘和肿瘤。在第24帧本文方法重建图像的边缘和结构也最清晰。

前期帧的扫描时间短,光子数较少,可以看出,所有算法在第2帧低光子数重建图像的MSE值较大,图像细节丢失较严重;第12帧有更小的MSE值,第24帧MSE值最小,但也有部分图像细节丢失。仿真实验中我们利用PET合成帧作为先验图像来构造图邻接矩阵,可以考虑利用MR图像的结构信息来更好地保留图像细节,研究融合MR先验图像和PET合成图像的构图方法。另外,本文的图邻接矩阵由高斯加权核函数计算,也可以考虑使用其他的核函数,或者直接通过图学习得到图邻接矩阵。

图4(a)和图4(b)展示了第2帧和第12帧重建图像的SNR值随迭代次数变化的曲线。由图可知,达到一定迭代次数后,随着迭代次数的增加,MLEM方法重建图像SNR值在急剧下降,KEM方法重建图像SNR值也在减小。这说明MLEM和KEM方法都会随着迭代次数增加出现图像质量退化,需要提前终止迭代。MLEM-L和KEM-L方法重建图像的SNR曲线始终保持增长并趋于稳定。这说明加入正则化项约束后,可以避免图像质量退化现象。Neural KEM方法重建图像的SNR曲线呈逐渐增长的趋势,但其值低于KEM-L方法。对比所有方

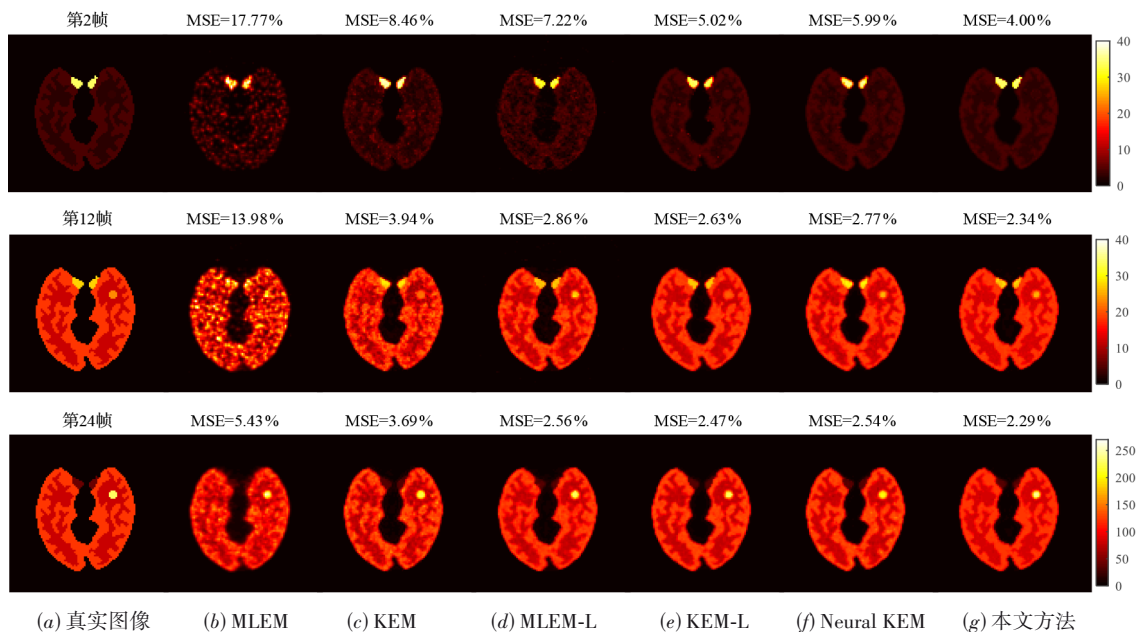


图3 第2, 12, 24帧的真实图像及不同方法重建的PET图像

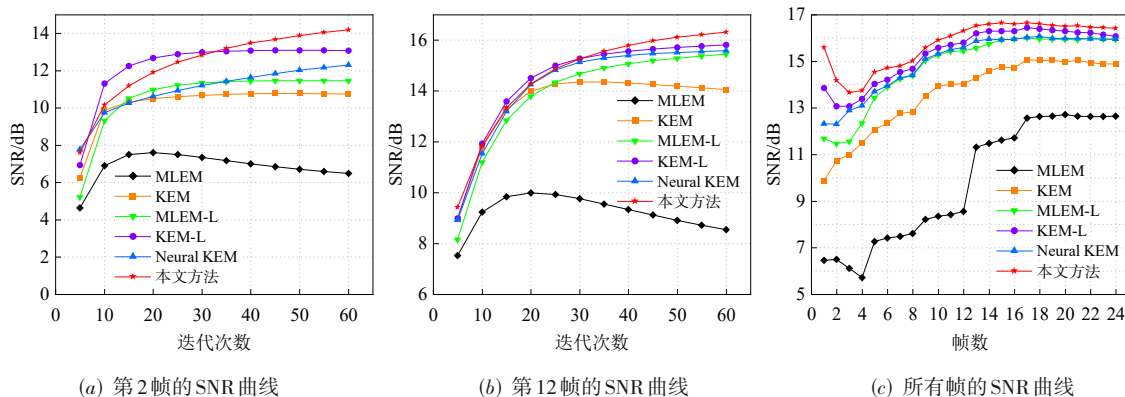


图4 不同方法重建图像的SNR曲线图

法,本文方法SNR值随迭代次数增加而增加,在迭代40次后,与其他方法相比,SNR值始终最大。

不同方法所有帧重建图像的SNR曲线如图4(c)所示,SNR值为10次独立噪声实现的SNR均值。表2给出了不同方法第2, 12, 24帧重建图像的SNR值,每行的最大值用粗体标出。从图4(c)和表2可以看出,带图拉普拉斯正则化项的方法与不带正则化项的方法相比,有更大的SNR值。MLEM-L方法比KEM方法的SNR值更大;Neural KEM方法的SNR值比MLEM-L方法大,但比KEM-L方法小。这说明了图拉普拉斯正则化约束的方法优于核方法以及深度图像先验,有更好的重建性能。本文方法的SNR值最大,说明重建图像噪声最少,重建质量最好。

图5显示了不同方法重建图像的方差-偏差曲线图。从左到右依次表示第10次迭代到第60次迭代图像的偏差与方差值,迭代间隔次数为10。从曲线的

表2 第2, 12, 24帧不同方法重建PET图像的SNR 单位:dB

帧数	MLEM	KEM	MLEM-L	KEM-L	Neural KEM	本文方法
2	6.50	10.74	11.46	13.08	12.31	14.19
12	8.55	14.05	15.45	15.81	15.60	16.32
24	12.65	14.88	15.94	16.08	15.95	16.43

变化趋势可以看出,所有方法的偏差随着迭代次数的增加而减小。相比MLEM和KEM方法,带图拉普拉斯正则化项的MLEM-L和KEM-L方法有更小的偏差与方差。Neural KEM方法能够显著减小图像的方差,但偏差较大。对于一定的方差,本文方法表现出最小的偏差;同样,在偏差相同时,本文方法方差最小。本文方法有最优的方差-偏差性能,在迭代过程中,收敛速度更快。

图6对比了不同重建方法得到的感兴趣区域的对比度恢复系数CRC与背景区域的标准差SD曲线。血池是第2帧中的ROI,肿瘤是第12帧和第24帧中的ROI,

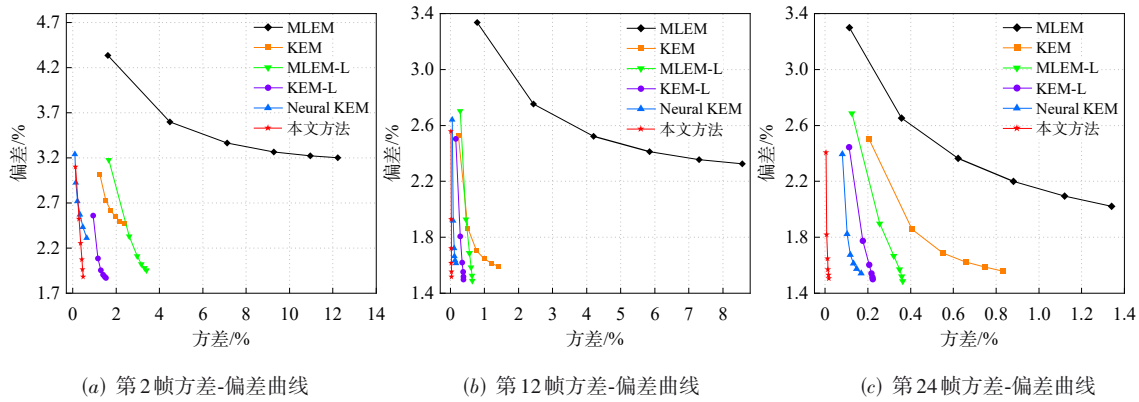


图5 不同方法重建图像的方差-偏差曲线图

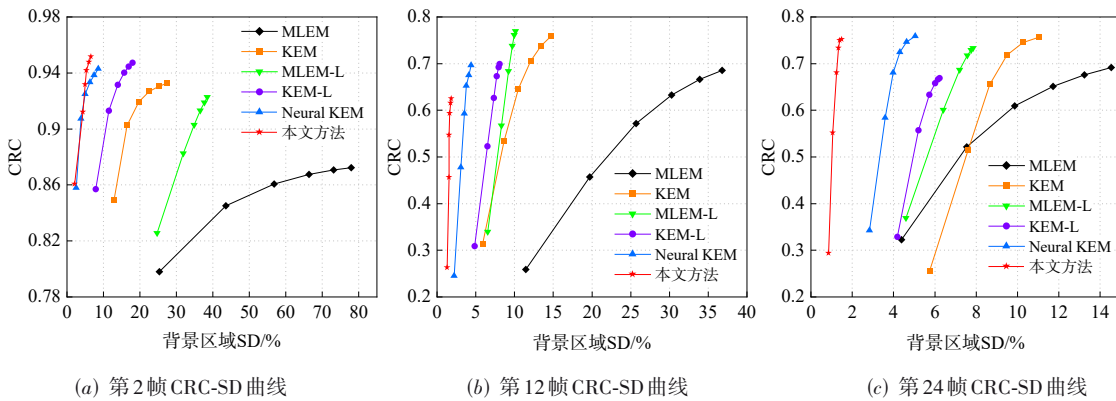


图6 不同方法重建图像的感兴趣区域CRC-SD曲线图

选取白质区域作为背景区域来计算噪声SD. 与MLEM与KEM方法相比,在相同的CRC水平下,带图拉普拉斯正则化项的MLEM-L与KEM-L方法降低了背景区域的SD,具有更低的背景噪声,但性能弱于Neural KEM方法. 在第12帧,本文方法在肿瘤区域的CRC略低于Neural KEM方法. 在大多数情况下本文方法具有较高的CRC和最低的SD值,背景噪声最少. 总体来看,本文方法重建图像有更优的CRC-SD曲线,说明本文方法对血池ROI和肿瘤ROI有更好的重建效果.

5 临床实验

5.1 实验设置

临床实验中,本文采用Jamadar等人^[32]提供的数据库,该数据库使用Siemens (Erlangen) Biograph 3 Tesla molecular MR(mMR)扫描仪对57名参与者进行95 min动态PET扫描,得到356个三维正弦图,正弦图数据之间间隔为16 s. 图像大小为334×334×127. 本文取第一个参与者第60个切片的数据进行实验. 与仿真实验不同的是,临床数据实验中我们以MR图像作为先验信息,MR图像如图7(a)所示.

由于临床数据缺乏真值,本文在PET大脑图像中选取了5个感兴趣区域进行定量比较. 5个感兴趣区域

如图8所示. 图中ROI1,ROI3,ROI5三个高活性区域作为目标区域;ROI2和ROI4两个低活性区域作为背景区域. 高活性区域与低活性区域之间的对比恢复度(Contrast Recovery, CR)定义如下^[21]:

$$CR = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{|\bar{x}_t - \bar{x}_r|}{\bar{x}_r} \quad (30)$$

其中, R 表示实验的实现次数, \bar{x}_t 表示目标ROI即高活性区域的活性平均值, \bar{x}_r 表示参考ROI即背景区域活性平均值. 分别选取实验过程中第20次迭代到第60次迭代重建结果,间隔设置为10次,计算背景噪声的标准偏差SD.

5.2 重建图像结果与分析

不同重建方法在临床数据上的重建图像如图7所示. 从图7可以看出,MLEM方法重建的图像存在较多噪声;KEM方法有效地减少了噪声,但灰质和白质区域对比度较低;带图拉普拉斯正则化的MLEM-L和KEM-L方法重建的图像有较清晰的边缘轮廓,噪声更少;Neural KEM方法和本文方法灰质和白质区域有更好的对比度,本文方法更好地保持了边缘轮廓,有更低的噪声.

图9显示了不同方法重建图像的ROI区域CR与背

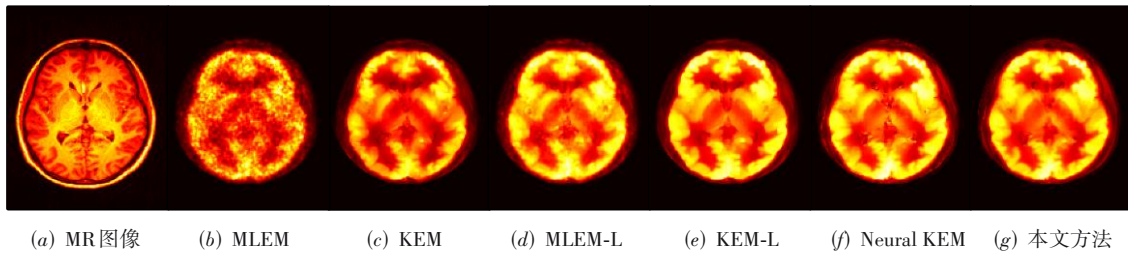


图7 临床数据MR图像和不同方法重建的PET图像

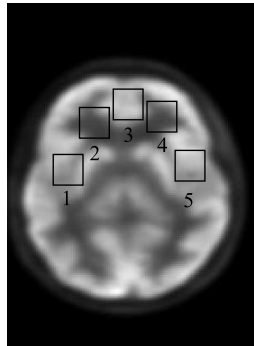


图8 临床数据选取的5个ROI区域

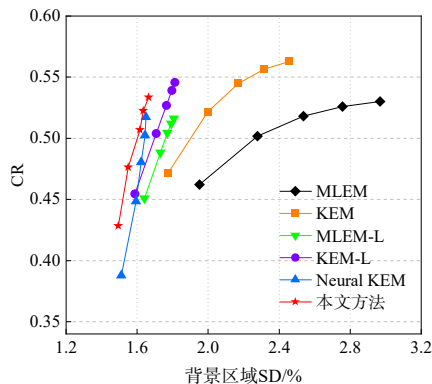


图9 不同方法重建图像的ROI区域CR与背景区域SD曲线图

景区域SD曲线. 对于MLEM和KEM方法,在后期迭代过程中有较高的CR,但背景SD也较大;MLEM-L和KEM-L方法在降低CR的同时,也减小了背景区域的SD;在相同的SD下,本文方法的CR也更高.可以看出,本文方法不仅有最小的背景SD,也能获得较高的CR,证明了所提出方法的有效性.

6 结论

本文提出了一种结合图拉普拉斯正则化和深度图像先验的PET图像核重建方法,使用优化转移方法求解基于神经网络的带约束最大似然函数优化问题,在迭代重建中更新神经网络.通过将图拉普拉斯正则化引入到PET图像核重建框架中,进一步提升了重建图像质量.仿真实验与临床实验结果均验证了本文方法的有效性.但是惩罚参数需要通过多次实验来微调

选取,如何更有效地得到优化参数是值得进一步研究的问题.

参考文献

- [1] SHEEP L A, VARDI Y. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982, 1(2): 113-122.
- [2] KNOLL F, HOLLER M, KOESTERS T, et al. Joint MR-PET reconstruction using a multi-channel image regularizer [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2016, 36(1): 1-16.
- [3] HOU Q, HUANG J, BIAN Z, et al. PET image reconstruction via nonlocal means induced prior[J]. Journal of X-Ray Science and Technology, 2015, 23(3): 331-348.
- [4] 童基均, 刘进, 蔡强. 基于全变差的加权最小二乘法PET图像重建[J]. 电子学报, 2013, 41(4): 787-790. TONG J J, LIU J, CAI Q. The PET image reconstruction based on weighted least-squares and TV penalty[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(3): 787-790. (in Chinese)
- [5] SUDARSHAN V P, CHEN Z, AWATE S P. Joint PET+MRI patch-based dictionary for Bayesian random field PET reconstruction[C]//International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention. Cham: Springer, 2018: 338-346.
- [6] WANG G, QI J. PET image reconstruction using kernel method[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2015, 34(1): 61-71.
- [7] HUTCHCROFT W, WANG G, CHEN K T, et al. Anatomically-aided PET reconstruction using the kernel method [J]. Physics in Medicine & Biology, 2016, 61(18): 6668.
- [8] WANG G. High temporal-resolution dynamic PET image reconstruction using a new spatiotemporal kernel method [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2019, 38(3): 664-674.
- [9] HUANG H. Dynamic PET reconstruction using the kernel method with non-local means denoising[J]. Biomedical Signal Processing and Control, 2021, 68: 102673.

- [10] CAO S, HE Y, SUN H, et al. Dynamic PET image reconstruction incorporating a median nonlocal means kernel method[J]. *Computers in Biology and Medicine*, 2021, 139: 104713.
- [11] GUO S, SHENG Y, CHAI L, et al. PET image reconstruction with kernel and kernel space composite regularizer[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2023, 42(6): 1786-1798.
- [12] 施俊, 汪琳琳, 王珊珊, 等. 深度学习在医学影像中的应用综述[J]. *中国图象图形学报*, 2020, 25(10): 1953-1981.
- SHI J, WANG L L, WANG S S, et al. Applications of deep learning in medical imaging: A survey[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2020, 25(10): 1953-1981. (in Chinese)
- [13] 刘少鹏, 赵慧民, 洪佳明, 等. 面向医学图像生成的鲁棒条件生成对抗网络[J]. *电子学报*, 2023, 51(2): 427-437.
- LIU S P, ZHAO H M, HONG J M, et al. Medical image synthesis using robust conditional GAN[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2023, 51(2): 427-437. (in Chinese)
- [14] 周涛, 霍兵强, 陆惠玲, 等. 残差神经网络及其在医学图像处理中的应用研究[J]. *电子学报*, 2020, 48(7): 1436-1447.
- ZHOU T, HUO B Q, LU H L, et al. Research on residual neural network and its application on medical image processing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2020, 48(7): 1436-1447. (in Chinese)
- [15] WANG G, JACOB M, MOU X, et al. Deep tomographic image reconstruction: Yesterday, today, and tomorrow[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2021, 40(11): 2956-2964.
- [16] GONG K, GUAN J, KIM K, et al. Iterative PET image reconstruction using convolutional neural network representation[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2019, 38(3): 675-685.
- [17] XIE Z. Generative adversarial network based regularized image reconstruction for PET[J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2020, 65(12): 125016.
- [18] HU Z, XUE H, ZHANG Q, et al. DPIR-Net: Direct PET image reconstruction based on the Wasserstein generative adversarial network[J]. *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, 2020, 5(1): 35-43.
- [19] HÄGGSTRÖM I, SCHMIDTLEIN C R, CAMPANELLA G, et al. Deep PET: A deep encoder-decoder network for directly solving the PET image reconstruction inverse problem[J]. *Medical Image Analysis*, 2019, 54: 253-262.
- [20] MEHRANIAN A, READER A J. Model-based deep learning PET image reconstruction using forward-backward splitting expectation-maximization[J]. *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, 2020, 5(1): 54-64.
- [21] SUN H, PENG L, ZHANG H, et al. Dynamic PET image denoising using deep image prior combined with regularization by denoising[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 52378-52392.
- [22] ULYANOV D, VEDALDI A, LEMPITSKY V. Deep image prior[C]//*Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Salt Lake City: IEEE, 2018: 9446-9454.
- [23] GONG K, CATANA C, QI J, et al. PET image reconstruction using deep image prior[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2019, 38(7): 1655-1665.
- [24] LI S, GONG K, BADAWI R D, et al. Neural KEM: A kernel method with deep coefficient prior for PET image reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2023, 42(3): 785-796.
- [25] SHUMAN D I, NARANG S K, FROSSARD P, et al. The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2013, 30(3): 83-98.
- [26] ORTEGA A, FROSSARD P, KOVAČEVIĆ J, et al. Graph signal processing: Overview, challenges, and applications[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2018, 106(5): 808-828.
- [27] PANG J, CHEUNG G. Graph Laplacian regularization for image denoising: Analysis in the continuous domain [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2017, 26(4): 1770-1785.
- [28] DONG X, THANOU D, RABBAT M, et al. Learning graphs from data: A signal representation perspective[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2019, 36(3): 44-63.
- [29] WANG G B, QI J. An optimization transfer algorithm for nonlinear parametric image reconstruction from dynamic PET data[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2012, 31(10): 1977-1988.
- [30] LANGE K, HUNTER D R, YANG I. Optimization transfer using surrogate objective functions[J]. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 2000, 9(1): 1-20.

- [31] KINGMA D P, BA J. Adam: A method for stochastic optimization[EB/OL]. (2014-12-22). <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:6628106>.
- [32] JAMADAR S D, WARD P G, LIANG E X, et al. Metabolic and hemodynamic testing-state connectivity of the human brain: A high-temporal resolution simultaneous BOLD-fMRI and FDG-fPET multimodality study[J]. *Cerebral Cortex*, 2021, 31(6): 2855-2867.

作者简介



盛玉霞 女,1979年出生于湖北省孝感市. 武汉科技大学信息科学与工程学院副教授. 主要研究方向为医学图像处理和图信号处理. 中国电子学会会员编号:E190157221M.
E-mail: shengyuxia@wust.edu.cn



孙 坤 男,1997年出生于河南省信阳市. 现为武汉科技大学信息科学与工程学院硕士研究生. 主要研究方向为医学图像处理.
E-mail: sunkun@163.com



柴 利 男,1972年出生于山东省烟台市. 浙江大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向包括分布式优化、图信号处理、网络化控制系统.
E-mail: chaili@zju.edu.cn